Constantes

Constante de Avogadro (N_A) = 6,02 x 10^{23} mol^{-1}

Constante de Faraday (F) = 9,65 x 10^4 C mol^{-1} =

= 9,65 x 10^4A s mol^{-1} = 9,65 x 10^4 J V^{-1} mol^{-1}

Volume molar de gás ideal = 22,4 L (CNTP)

Carga elementar = 1,60 x 10^{-19} C

Constante dos gases (R) = 8,21 x 10^{-2} atm L K^{-1} mol^{-1} =

= 8,31 J K^{-1} mol^{-1} = 1,98 cal K^{-1} mol^{-1}

Constante gravitacional (g) = 9,81 m s^{-2}

Constante de Planck (h) = 6,63 x 10^{-34} m^2 kg s^{-1}

Velocidade da luz no vácuo = 3,0 x 10^8 m s^{-1}

Número de Euler (e) = 2,72

Definições

Pressão: 1 atm = 760 mmHg = 1,01325 x 10^5 N m^{-2} =

= 760 Torr = 1,01325 bar

Energia: 1 J = 1 N m = 1kg m^2 s^{-2} = 6,24 x 10^{18} eV

Condições normais de temperatura e pressão (CNTP): 0°C e 760 mmHg

Condições ambientes: 25°C e 1 atm

Condições padrão: 1 bar; concentração das soluções = = 1 mol L^{-1} (rigorosamente: atividade unitária das espécies); sólido com estrutura cristalina mais estável nas condições de pressão e temperatura em questão.

(s) = sólido. (ℓ) = líquido. (g) = gás. (aq) = aquoso.

(conc) = concentrado. (ua) = unidades arbitrárias.

u.m.a. = unidade de massa atômica. [X] = concentração da espécie química X em mol L^{-1}

ln X = 2,3 log X

Massas Molares

Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar ($g\ mol^{-1}$)
H	1	1,01
Be	4	9,01
C	6	12,01
N	7	14,01
O	8	16,00
Na	11	22,99
C*l*	17	35,45
K	19	39,10
Ca	20	40,08
Mn	25	54,94
Se	34	78,96
I	53	126,90
Ba	56	137,33

1

Considere reações de combustão do etanol.

a) Escreva a equação química balanceada para a reação com oxigênio puro.

b) Escreva a equação química balanceada para a reação com ar atmosférico.

c) Escreva a equação química balanceada para a reação com 50% da quantidade estequiométrica de ar atmosférico.

d) Classifique as reações dos itens a), b) e c) em ordem crescente de variação de entalpia reacional.

Resolução

a) **Combustão do etanol com O_2 puro:**
$C_2H_5OH + 3\,O_2 \to 2\,CO_2 + 3\,H_2O$ + calor

b) **Combustão do etanol com ar atmosférico:**
Composição aproximada do ar atmosférico, em volume:
$79\%\ N_2 + 21\%\ O_2$

Logo, temos:

1 mol de O_2 para 3,76 mol de N_2

$C_2H_5OH + 3\,(O_2 + 3{,}76\,N_2) \to$
$\to 2\,CO_2 + 3\,H_2O + 3 \,.\, 3{,}76\,N_2$ + calor

O gás N_2 não participa da reação.

c) **Combustão do etanol para 50% da quantidade estequiométrica de ar atmosférico, ou seja,**
$1{,}5\,(O_2 + 3{,}76\,N_2)$

$C_2H_5OH + 1{,}5\,(O_2 + 3{,}76\,N_2) \to$
$\to CO_2 + C + 3\,H_2O + 1{,}5 \,.\, 3{,}76\,N_2$ + calor

Novamente, o gás N_2 não participa da reação.

d) **Tanto na reação *a* como na reação *b*, ocorre a oxidação total dos átomos de carbono do álcool, logo a energia liberada será a mesma.**
Na reação *c*, a oxidação dos átomos de carbono não é total, logo a energia liberada será menor do que nas anteriores.

$|\Delta H|_C < |\Delta H|_A = |\Delta H|_B$ ou

$\Delta H_C > \Delta H_A = \Delta H_B$

2

Uma determinada quantidade de um composto A foi misturada a uma quantidade molar três vezes maior de um composto B, ou seja, A + 3B. Essa mistura foi submetida a dois experimentos de combustão (I e II) separadamente, observando-se:

I. A combustão dessa mistura A + 3B liberou 550 kJ de energia.

II. A combustão dessa mistura A + 3B, adicionada de um composto C em quantidade correspondente a 25% em mol do total da nova mistura, liberou 814 kJ de energia.

Considerando que os compostos A, B e C não reagem entre si, determine os valores numéricos

a) da quantidade, em mol, de A, B e C.

b) do calor de combustão, em kJ mol^{-1}, do composto C, ΔH_c (C).

Dados: ΔH_c (A) = –700 kJ mol^{-1};
ΔH_c (B) = –500 kJ mol^{-1}.

Resolução

Para a mistura A + 3B, a proporção em mols de cada composto é de 1 para 3.

Cálculo da quantidade em mols de cada composto, A(x) e B (3x), sabendo que um mol de A libera 700 kJ e 3 mol de B liberam 3 x 500 kJ, e que a mistura libera no total 550 kJ.

$$x \cdot 700 + 3x \cdot 500 = 550$$

$$700x + 1500x = 550$$

$$2200x = 550$$

$$x = 0{,}25 \text{ mol}$$

Portanto, a mistura contém 0,25 mol de A e 3 x 0,25 mol = 0,75 mol de B.

Na mistura A + 3B + tC, a proporção em mols de C corresponde a 25% do total da mistura.

$$(0{,}25 + 0{,}75 + n) \text{ mol} \text{ ——— } 100\%$$
$$n \text{ mol} \text{ ——— } 25\%$$

$$25\,(0{,}25 + 0{,}75 + n) = 100 \cdot n$$

$$25 + 25n = 100n$$

$$75n = 25$$

$$n = \frac{1}{3} \text{ mol}$$

a) A ⇒ 0,25 mol
B ⇒ 0,75 mol
C ⇒ $\frac{1}{3}$ mol

b) A quantidade de calor liberado pela queima de $\frac{1}{3}$ mol de C corresponde à diferença (814 – 550) kJ = 264 kJ

$\frac{1}{3}$ mol de C ——— 264 kJ

1 mol de C ——— y

y = 792 kJ

Portanto, o calor de combustão de C será:
ΔH_c (C) = –792 kJ . mol^{-1}

3

Considere uma porção de uma solução aquosa de um eletrólito genérico AB, em formato de um cilindro de 2 cm de diâmetro e 314 cm de comprimento, cuja concentração seja de $1{,}0 \times 10^{-2}$ mol L^{-1}. Sabendo que a resistência elétrica dessa porção é de $1{,}0 \times 10^{4}$ ohm, calcule a sua condutividade molar em S cm^2 mol^{-1}.

Resolução

Cálculo da condutividade (σ):

Sendo R: resistência; ρ: resistividade, ℓ: comprimento; A: área; Ω: ohm; S: siemens (Ω^{-1} ou mho), temos:

$$R = \frac{\rho\ell}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\ell}{R \cdot A} = \frac{314\ cm}{1 \cdot 10^4 \Omega \cdot 3{,}14 \cdot 1\ cm^2}$$

$$\sigma = 1 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1} \cdot cm^{-1} = 1 \cdot 10^{-2}\ S \cdot cm^{-1}$$

Cálculo da concentração em mol/cm^3:

$$1 \cdot 10^{-2}\ mol \longrightarrow 1000\ cm^3$$

$$x \longrightarrow 1\ cm^3$$

$$x = 1 \cdot 10^{-5}\ mol/cm^3$$

Cálculo da condutividade molar (Λ):

$$\Lambda = \frac{\sigma}{C} = \frac{1 \cdot 10^{-2}\ S \cdot cm^{-1}}{1 \cdot 10^{-5}\ mol/cm^3} = 1 \cdot 10^3 \frac{S \cdot cm^2}{mol}$$

4

Uma solução aquosa de água oxigenada a 3% (v/v) foi adicionada a soluções aquosas ácidas em dois experimentos diferentes. Foram observados:

I. No primeiro experimento: a adição a uma solução aquosa ácida de permanganato de potássio resultou na perda da coloração da solução, tornando-a incolor.

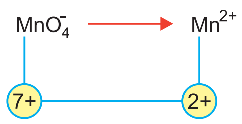
II. No segundo experimento: a adição a uma solução aquosa ácida de iodeto de potássio inicialmente incolor resultou em uma solução de coloração castanha.

Com base nas observações experimentais, escreva as reações químicas balanceadas para cada experimento e indique os agentes oxidantes e redutores em cada caso, quando houver.

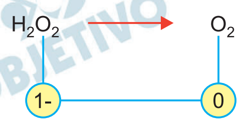
Resolução

I) Reação I:

Semirreação de redução



Semirreação de oxidação



Balanceando os átomos de oxigênio usando H_2O, temos:

$MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+} + 4\,H_2O$

$H_2O_2 \rightarrow O_2$

Balanceando os átomos de hidrogênio usando H^+, temos:

$MnO_4^- + 8\,H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 4\,H_2O$

$H_2O_2 \rightarrow O_2 + 2H^+$

Balanceando as cargas por adição de elétrons, temos:

$MnO_4^- + 8\,H^+ + 5\,e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4\,H_2O$

$H_2O_2 \rightarrow O_2 + 2\,H^+ + 2\,e^-$

Balanceando os elétrons, temos:

$2\,MnO_4^- + 16\,H^+ + 10\,e^- \rightarrow 2\,Mn^{2+} + 8\,H_2O$

$5\,H_2O_2 \rightarrow 5\,O_2 + 10\,H^+ + 10\,e^-$

Equação global:

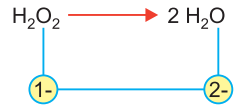
$2MnO_4^- + 5\,H_2O_2 + 6H^+ \rightarrow 2Mn^{2+} + 5O_2 + 8H_2O$

Agente oxidante: MnO_4^- (permanganato de potássio)

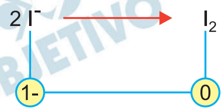
Agente redutor: H_2O_2 (água oxigenada)

II) Reação II:

Semirreação de redução



Semirreação de oxidação



Balanceando os átomos de hidrogênio usando H^+, temos:

$2H^+ + H_2O_2 \rightarrow 2\ H_2O$

$2\ I^- \rightarrow I_2$

Balanceando as cargas por adição de elétrons, temos:

$2e^- + 2\ H^+ + H_2O_2 \rightarrow 2\ H_2O$

$2\ I^- \rightarrow I_2 + 2\ e^-$

Equação global:

$2\ H^+ + H_2O_2\ + 2\ I^- \rightarrow\ 2\ H_2O + I_2$

Agente oxidante: H_2O_2 (água oxigenada)

Agente redutor: I^- (iodeto de potássio)

5

Classifique cada uma das substâncias abaixo corno óxidos ácido, básico ou anfótero.

a) SeO_2

b) N_2O_3

c) K_2O

d) BeO

e) BaO

Resolução

a) SeO_2 – óxido ácido (não metal com O)

Se: grupo 16, não metal

b) N_2O_3 – óxido ácido (não metal com O)

N: grupo 15, não metal

c) K_2O – óxido básico (metal com O)

K: grupo 1, metal

d) BeO – óxido anfótero (reage com ácido e com base)

Be: grupo 2, metal

Nota: Be é similar ao A*l*, que também forma óxido anfótero: Al_2O_3.

e) BaO – óxido básico (metal com O)

Ba: grupo 2, metal

6

Considere a seguinte reação genérica, nas condições padrão e a 25°C:

$$2\,A^{3+} + 2\,B^- \rightleftarrows 2\,A^{2+} + B_2$$

Determine a constante de equilíbrio dessa reação a 25°C, sabendo que os valores dos potenciais de eletrodo padrão de semicélula das espécies envolvidas são iguais a + 0,15 V e – 0,15 V.

Resolução

I) Cálculo do ΔE^0 da reação:

$$2\,A^{3+} + 2\,B^- \rightleftarrows 2\,A^{2+} + B_2$$

Redução

Oxidação

Como a espécie A^{3+} sofre redução, ela possui maior potencial de redução (+ 0,15V). B^- sofre oxidação, logo possui menor potencial de redução (– 0,15V).

$$\Delta E^0 = E^0_{\text{sofre redução}} - E^0_{\text{sofre oxidação}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E^0 = 0{,}15V - (-0{,}15V) = 0{,}30V$$

II) Cálculo da constante de equilíbrio (K). Usando a Equação de Nernst, temos:

$$\Delta E = \Delta E^0 - \frac{RT}{nF}\,\ell nQ$$

No equilíbrio, $\Delta E = 0$, logo:

$$\Delta E^0 = \frac{RT}{nF}\,\ell nK \text{ ou } \Delta E^0 = \frac{RT}{nF}\,2{,}3\log K$$

$$0{,}30V = \frac{8{,}31\,J\,K^{-1}\,mol^{-1} \,.\, 298\,K \,.\, 2{,}3\log K}{2 \,.\, 9{,}65 \,.\, 10^4\,J \,.\, V^{-1}\,mol^{-1}}$$

$$\log K = 10{,}16$$

$$K = 10^{10{,}16}$$

7

Uma solução comercial de HCl é vendida com 37% (em massa) de HCl em água. A densidade dessa solução de HCl é de 1,15 g cm^{-3},

a) Considerando que o HCl se dissocia completamente, determine o pH dessa solução comercial.

b) O valor do pH determinado no item **a)** possui significado físico? Justifique.

Resolução

a) Determinação da massa de 1 litro de solução de HCl:

1,15 g ——— 1 cm^3
m ——— 1000 cm^3
m = 1150 g de solução

Determinação da massa de HCl nessa solução:

1150 g ——— 100% de solução
x ——— 37% de HCl
x = 425,5 g de HCl

Determinação da quantidade de matéria, em mol, de HCl:

1 mol de HCl ——— 36,46 g
y ——— 425,5 g
y = 11,67 mol de HCl

∴ a concentração de HCl é 11,67 mol/L

Considerando que o HCl se dissocia completamente, temos:

$$\underset{11{,}67\ \text{mol/L}}{HCl} \xrightarrow{H_2O} \underset{11{,}67\ \text{mol/L}}{H^+} + Cl^-$$

Cálculo do pH:

pH = – log [H^+]
pH = – log 11,67
pH ≅ – log 12
pH ≅ – (log 3 + log 4)
pH ≅ – (0,5 +0,6)

$$\boxed{pH \cong -1{,}1}$$

b) Sim, o sinal negativo no valor do pH indica que a concentração de H^+ é maior que 1 mol/L.

8

Considere as variações de entalpia de processo abaixo tabeladas.

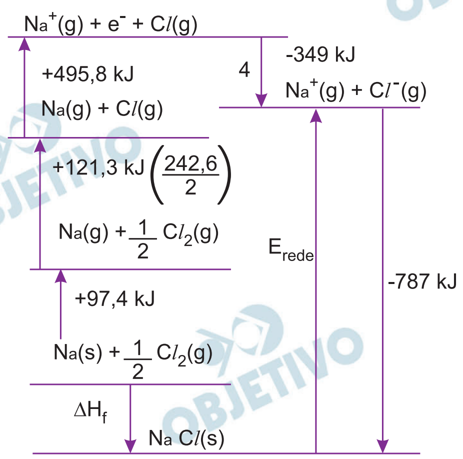
Processo	ΔH (kJ mol $^{-1}$)
Ionização do Na^0	495,8
Energia de ligação $Cl — Cl$	242,6
Entalpia de vaporização do Na^0	97,4
Afinidade eletrônica do Cl	– 349
Entalpia de rede do $NaCl$	– 787

a) Esboce o diagrama de Born-Haber para a formação do $NaCl$(s) a partir de Na^0(s) e Cl_2(g) e calcule a variação de entalpia de formação do $NaCl$(s).

b) Sabe-se que o valor absoluto (em módulo) da entalpia de rede do CaO(s) é maior do que a do $NaCl$(s). Explique por quê.

Resolução

a)



$\Delta H_f = +97{,}4\ kJ + 121{,}3\ kJ + 495{,}8\ kJ - 349\ kJ - 787\ kJ$

$\Delta H_f = -421{,}5$ **kJ/mol de $NaCl$ (s)**

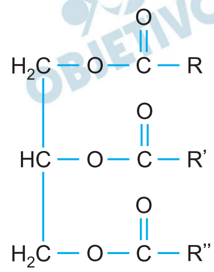
b) A energia de rede é a energia necessária para separar completamente 1 mol de um composto iônico sólido em íons gasosos.

A energia de rede do $\overset{2+}{Ca}\overset{2-}{O}$ (s) é maior do que a do $\overset{1+}{Na}\overset{1-}{Cl}$ (s) porque as cargas nos íons $\overset{2+}{Ca}$ e $\overset{2-}{O}$ são duas vezes maiores, cada uma, do que as cargas em $\overset{1+}{Na}$ e $\overset{1-}{Cl}$.

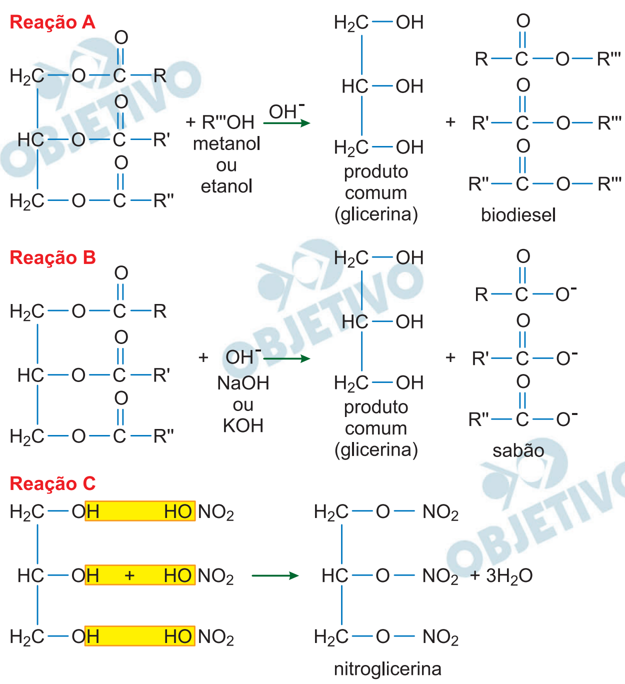
Conclusão: quanto maior as cargas dos íons, maior a energia de rede.

9

A figura abaixo mostra a estrutura básica de um triacilglicerídeo, em que R, R' e R" representam cadeias carbônicas, saturadas ou insaturadas, com pelo menos oito átomos de carbono. Sabe-se que o triacilglicerídeo pode reagir tanto por transesterificação (reação A) quanto por hidrólise básica (reação B). Em ambos os casos, um produto comum dessas reações pode ser usado na produção de nitroglicerina (reação C). Com base nessas informações, escreva as equações que descrevem as reações A, B e C.



Resolução



10

Considere a reação genérica $2A(g) \rightleftarrows B(g)$. No instante inicial, apenas o reagente A está presente. Sabendo que a reação direta é exotérmica, construa os gráficos de concentração de cada substância em função do tempo de reação para as seguintes condições:

a) desde o instante inicial até o equilíbrio, na presença e na ausência de catalisador.

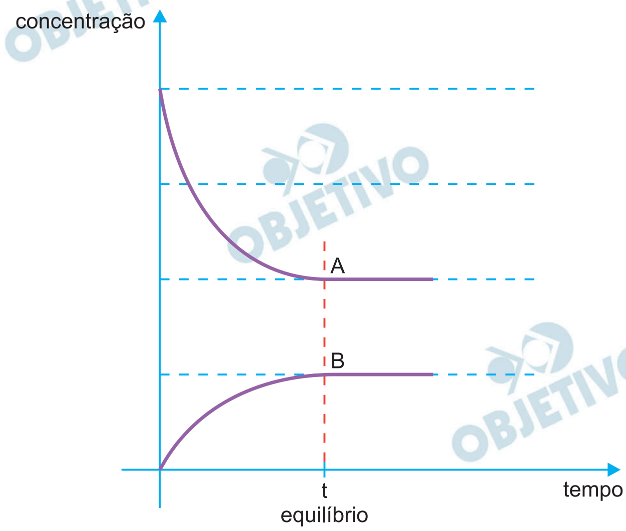
b) a partir do equilíbrio inicial, com um rápido aumento da temperatura, até um novo equilíbrio.

c) a partir do equilíbrio inicial, com um rápido aumento da pressão, até um novo equilíbrio.

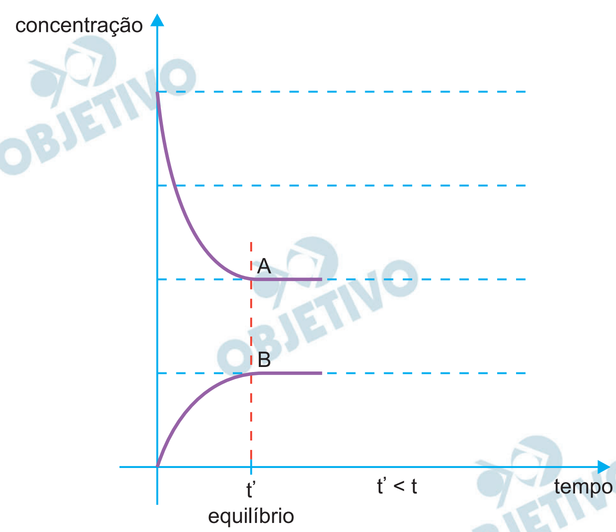
d) a partir do equilíbrio inicial, com a remoção rápida de 50% do produto B, até um novo equilíbrio.

Resolução

a) **Como apenas o reagente A está presente, a reação ocorrerá no sentido direto, ou seja, no sentido de consumo de A e de produção de B, na proporção de 2 : 1.**
Vamos admitir que no equilíbrio a concentração de A seja maior que a de B. Sabe-se que na presença de catalisador a reação é mais rápida e o equilíbrio será atingido em menor tempo.

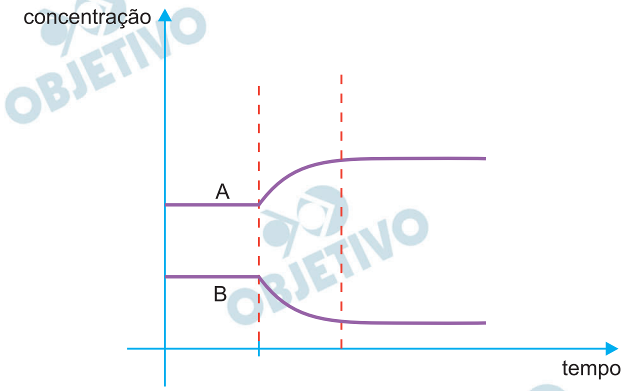


Na ausência de catalisador.

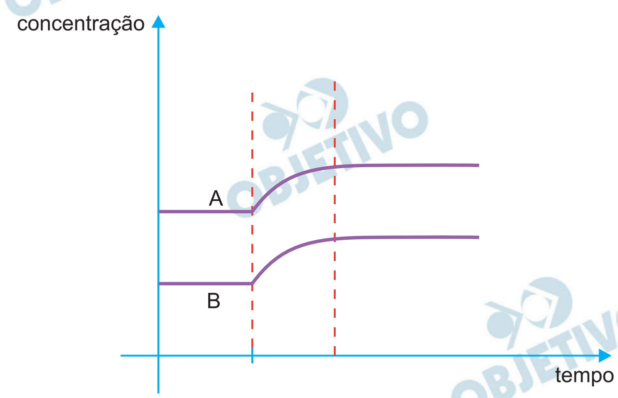


Na presença de catalisador.

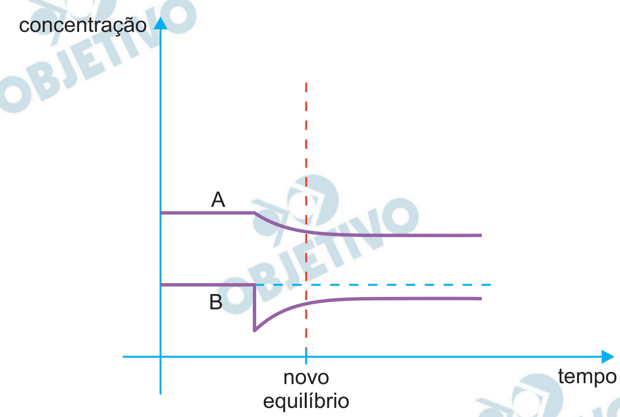
b) **Com um rápido aumento de temperatura, o equilíbrio será deslocado no sentido da reação endotérmica, ou seja, no sentido do consumo de B e de produção de A.**



c) **Com um rápido aumento da pressão, o equilíbrio será deslocado no sentido em que houver contração de volume, ou seja, no sentido em que ocorre consumo de A e produção de B.**
Com esse aumento de pressão, o volume irá diminuir aumentando a concentração de A e de B, mantendo K_P e K_C constantes.



d) **Com a remoção rápida de 50% do produto B, o equilíbrio será deslocado no sentido em que houver produção de B e consumo de A.**



Notações

R : conjunto dos números reais
i : unidade imaginária $i^2 = -1$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

1

Determine os valores reais de *a* e *b* para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuam duas raízes em comum e, a seguir, determine essas raízes.

Resolução

1) **Sejam *r* e *s* as raízes comuns às duas equações. Seja *p* a terceira raiz da equação $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e *q* a terceira raiz da equação $x^3 + bx + 12 = 0$.**

2) **Pelas relações de Girard, temos:**

$$\begin{cases} r + s + p = -a \\ rs + rp + sp = 0 \\ rsp = -18 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} r + s + q = 0 \\ rs + rq + sq = b \\ rsq = -12 \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{rsp}{rsq} = \frac{-18}{-12} \Leftrightarrow q = \frac{2p}{3}.$$

Substituindo nas primeiras relações de Girard, temos

$$\begin{cases} r + s + p = -a \\ r + s + \dfrac{2p}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{3} = -a \Leftrightarrow p = -3a$$

Desta forma, – 3a é uma das raízes da primeira equação dada.

3) $(-3a)^3 + a \cdot (-3a)^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow -18a^3 = -18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$, **pois** $a \in \mathbb{R}$.

Substituindo resulta $p = -3$ **e** $q = -2$

Além disso, $r + s + (-3) = -1 \Rightarrow r + s = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s = 2 - r$

$r \cdot s \cdot (-3) = -18 \Leftrightarrow rs = 6$ **e**

$b = rs + q\,(r + s) = 6 + (-2) \cdot 2 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

Desta forma, $r(2 - r) = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}\,i}{2} \Leftrightarrow r = 1 \pm \sqrt{5}\,i$$

Para $r = 1 + \sqrt{5}\,i \Leftrightarrow s = 1 - \sqrt{5}\,i$ **e**

para $r = 1 - \sqrt{5}\,i \Leftrightarrow s = 1 + \sqrt{5}\,i$

Respostas: $a = 1$, $b = 2$ **e as raízes comuns são**
$1 + \sqrt{5}\,i$ **e** $1 - \sqrt{5}\,i$

2

Determine todas as soluções da equação

$\text{sen}^6x + \cos^6x = \dfrac{7}{12}$.

Resolução

Sendo $\text{sen}^6x + \cos^6x = \dfrac{7}{12}$ **, temos:**

$$(\text{sen}^2x + \cos^2x)^3 = 1^3$$

$$\text{sen}^6x + 3 \cdot \text{sen}^4x \cdot \cos^2x + 3 \cdot \text{sen}^2x \cdot \cos^4x + \cos^6x = 1$$

$$3 \cdot \text{sen}^2x \cdot \cos^2x \cdot (\text{sen}^2x + \cos^2x) + \frac{7}{12} = 1$$

$$3 \cdot \text{sen}^2x \cdot (1 - \text{sen}^2x) = \frac{5}{12}$$

$$36 \cdot \text{sen}^4x - 36 \cdot \text{sen}^2x + 5 = 0$$

$$\text{sen}^2x = \frac{1}{6} \quad \text{ou} \quad \text{sen}^2x = \frac{5}{6}$$

$$\text{sen } x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ ou sen } x = \pm \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$x = \text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + n \cdot 2\pi; \ (n \in \mathbb{Z})$$

$$x = \text{arc sen}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + n \cdot 2\pi; \ (n \in \mathbb{Z})$$

$$x = \text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + n \cdot 2\pi; \ (n \in \mathbb{Z})$$

$$x = \text{arc sen}\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + n \cdot 2\pi; \ (n \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \text{ arc sen } \frac{\sqrt{6}}{6} + n \cdot 2\pi \text{ ou } x = \pm \text{ arc sen } \frac{\sqrt{30}}{6} + n \cdot 2\pi; \ (n \in \mathbb{Z}) \right\}$$

3

Determine o número complexo z de menor argumento que satisfaz $|z - 25i| \leq 15$.

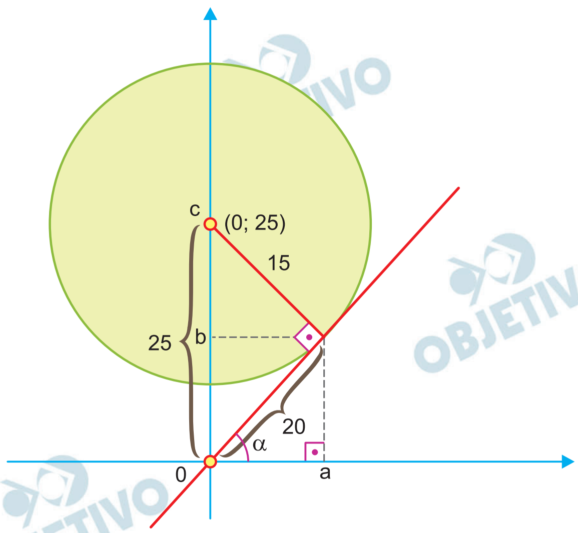
Resolução

Sejam $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $\alpha = \arg(z)$

I) $|z - 25i| \leqslant 15$**, temos:**

$$|a + bi - 25i| \leqslant 15 \Leftrightarrow |a + (b - 25)i| \leqslant 15 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a^2 + (b - 25)^2 \leqslant 15^2$**, que representa a região**



em que α é o menor argumento entre todos os números que atendem à região.

II) Assim, o número complexo z de menor argumento que satisfaz $|z - 25i| \leqslant 15$ é $z = a + bi$, logo:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 20 \\ a^2 + (b - 25)^2 = 15^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 400 \\ a^2 + (b - 25)^2 = 225 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 16 \end{cases}$$

Assim, $z = 12 + 16i$ é o número complexo de menor argumento e que satisfaz a região mostrada acima.

4

Sabendo que x pertence ao intervalo fechado [1, 64], determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right).$$

Resolução

$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot [\log_2 8 - \log_2 x]$

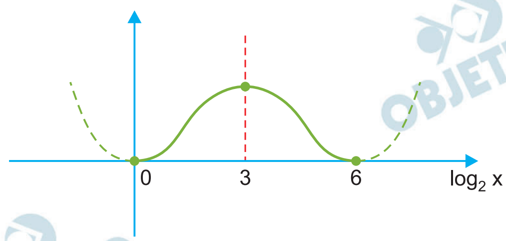
$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot (3 - \log_2 x)$

$f(x) = (\log_2 x)^4 - 12(\log_2 x)^3 + 36(\log_2 x)^2$

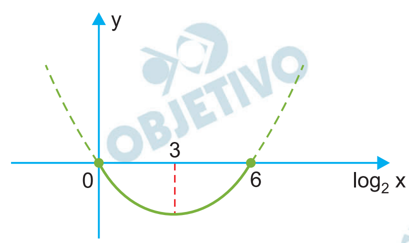
$f(x) = (\log_2 x)^2 \cdot [(\log_2 x)^2 - 12 \cdot \log_2 x + 36]$

$f(x) = (\log_2 x)^2 \cdot [\log_2 x - 6]^2$

Se $1 \le x \le 64$ então, $0 \le \log_2 x \le 6$ e, portanto, o gráfico de f em função de $\log_2 x$ é



A função f é o quadrado de $g(x) = \log_2 x \cdot (\log_2 x - 6)$ cujo gráfico é



A função g é mínima para $\log_2 x = 3$ e

$g_{mín} = 3 \cdot (3 - 6) = -9$

Para $\log_2 x = 3$, a função f, que é o quadrante de g será máxima e, portanto, $f_{máx} = (-9)^2 = 81$.

Resposta: O maior valor de f é 81.

5

Seja F o foco da parábola de equação $(y-5)^2 = 4(x-7)$, e sejam A e B os focos da elipse de equação

$\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{8} = 1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F.

Resolução

1) **A equação $(y-5)^2 = 4(x-7)$ representa uma parábola de concavidade voltada para a direita, com vértice no ponto (7; 5) e f = 1. Assim, F(8; 5).**

2) **A equação $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{8} = 1$ representa uma elipse com eixo maior paralelo ao eixo x, centro no ponto (4; 2), $a^2 = 9$ e $b^2 = 8$. Assim,**
$f = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-8} = 1$. Logo as coordenadas dos focos são A(3; 2) e B(5; 2).

3) **Seja P o ponto de coordenadas $(x_P; y_P)$. A área do triângulo ABP é dada por**

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_P & x_P & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| = |y_P - 2|$$

4) **A distância de P a F é dada por**
$$d_{P,F} = \sqrt{(x_P-8)^2 + (y_P-5)^2}$$

5) **Como a área do triângulo ABP é numericamente igual ao dobro da distância de P a F, temos**

$$S = 2d_{P,F} \Leftrightarrow |y_P - 2| = 2\sqrt{(x_P-2)^2 + (y_P-5)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y_P-2)^2 = 4[(x_P-2)^2 + (y_P-5)^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_P^2 - 4y_P + 4 = 4(x_P-2)^2 + 4y_P^2 - 40y_P + 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x_P-2)^2 + 3(y_P^2 - 12y_P + 36) - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x_P-2)^2 + 3(y_P-6)^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_P-2)^2}{3} + \frac{(y_P-6)^2}{4} = 1$$

que representa uma elipse com eixo maior paralelo ao eixo y e centro no ponto (2; 6).

6

Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \text{ e } \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

Resolução

Sendo *r* a razão da progressão aritmética crescente (a; b; c), temos:

I. $\cos a + \cos b + \cos c = 0$

$\cos(b - r) + \cos b + \cos(b + r) = 0$

$2 \,.\, \cos b \,.\, \cos r + \cos b = 0$

$\cos b \,.\, (2 \cos r + 1) = 0$

$\cos b = 0 \text{ ou } \cos r = -\dfrac{1}{2}$

II. $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0$

$\operatorname{sen}(b - r) + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(b + r) = 0$

$2 \operatorname{sen} b \,.\, \cos r + \operatorname{sen} b = 0$

$\operatorname{sen} b \,.\, (2 \,.\, \cos r + 1) = 0$

$\operatorname{sen} b = 0 \text{ ou } \cos r = -\dfrac{1}{2}$

Para que *a*, *b* e *c* satisfaçam

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0, \end{cases}$$

devemos ter:

$$\cos r = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \pm\frac{2\pi}{3} + n \,.\, 2\pi, \ (n \in \mathbb{Z})$$

Já que r > 0, a menor razão possível para esta progressão aritmética crescente é $\dfrac{2\pi}{3}$.

Resposta: $\dfrac{2\pi}{3}$.

7

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

Resolução

Se n = "2abcde", com *a*, *b*, *c*, *d*, *e* algarismos, temos:

"abcde2" = 3 . "2abcde"

Substituindo "abcde" por *y*, temos:

$10 . y + 2 = 3 . [2 . 10^5 + y] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10y + 2 = 6 . 10^5 + 3y \Leftrightarrow 7y = 600\,000 - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 599\,998 \div 7 \Leftrightarrow y = 85\,714$

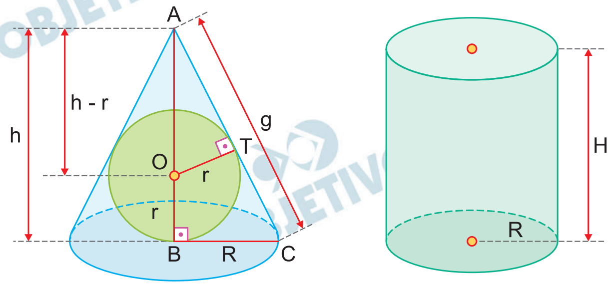
Assim sendo, "abcde" = 85 714 e

n = "2abcde" = 285 714

8

Um cone circular reto, de altura h, e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro, e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de h, o raio da esfera inscrita no cone.

Resolução



Sejam g a geratriz do cone, H a altura do cilindro, R a medida do raio da base do cone e do cilindro e r o raio da esfera inscrita no cone.

I) $V_{cone} = \frac{1}{2} \cdot V_{cilindro} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \pi R^2 \cdot H \Rightarrow H = \frac{2h}{3}$$

II) $g^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow g = \sqrt{R^2 + h^2}$

III) $A_{\text{lateral do cone}} = A_{\text{lateral do cilindro}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi Rg = 2\pi R \cdot H \Rightarrow g = 2H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 2 \cdot \frac{2h}{3} \Rightarrow g = \frac{4h}{3}$$

Assim, $g = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \frac{4h}{3} = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{16h^2}{9} = R^2 + h^2 \Rightarrow R^2 = \frac{7h^2}{9} \Rightarrow R = \frac{h\sqrt{7}}{3}$$

IV) **Da semelhança dos triângulos ATO e ABC, temos:**

$$\frac{r}{R} = \frac{h - r}{g} \Rightarrow \frac{r}{\frac{h\sqrt{7}}{3}} = \frac{h - r}{\frac{4h}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4r = \sqrt{7}\,h - \sqrt{7}\,r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}} \cdot h \Rightarrow$$

$$r = \frac{\sqrt{7} \cdot (4 - \sqrt{7})}{9} \cdot h \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{7} - 7}{9} \cdot h$$

Resposta: $\frac{4\sqrt{7} - 7}{9} \cdot h$

9

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine $\mathrm{sen}\,\hat{B}$, sabendo que

$$\mathrm{sen}\,(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{4}{5} = \mathrm{sen}\,(\hat{A}-\hat{C}).$$

Resolução

1) Sendo $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ ângulos de um triângulo, tem-se

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180° \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(\hat{A}+\hat{B}) = \mathrm{sen}\,\hat{C}$

Se $\hat{C} > \hat{A}$, teríamos $\hat{A}-\hat{C} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{sen}\,(\hat{A}-\hat{C}) < 0$, o que é impossível, pois

$\mathrm{sen}\,(\hat{A}-\hat{C}) = \frac{4}{5}$.

Assim, $\hat{A} > \hat{C}$ e, portanto, $\hat{C}$ não é o maior ângulo do triângulo. Dessa forma, $\cos\,\hat{C} > 0$.

2) $\mathrm{sen}\,\hat{C} = \mathrm{sen}\,(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{4}{5}$ e, portanto, $\cos\,\hat{C} = \frac{3}{5}$

Como $\mathrm{sen}\,(\hat{A}-\hat{C}) = \frac{4}{5}$, tem-se $\cos\,(\hat{A}-\hat{C}) = \frac{3}{5}$

ou $\cos\,(\hat{A}-\hat{C}) = -\frac{3}{5}$

Para $\cos\,(\hat{A}-\hat{C}) = \frac{3}{5}$, resulta:

$$\begin{cases} \mathrm{sen}\,\hat{A}\,.\,\cos\hat{C} - \mathrm{sen}\,\hat{C}\,.\,\cos\,\hat{A} = \frac{4}{5} \\ \cos\,\hat{A}\,.\,\cos\hat{C} + \mathrm{sen}\,\hat{A}\,.\,\mathrm{sen}\,\hat{C} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\,\hat{A}\,.\,\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\,.\,\cos\,\hat{A} = \frac{4}{5} \\ \cos\,\hat{A}\,.\,\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\,.\,\mathrm{sen}\,\hat{A} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\,\mathrm{sen}\,\hat{A} - 4\cos\,\hat{A} = 4 \\ 3\cos\,\hat{A} + 4\,\mathrm{sen}\,\hat{A} = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\,\hat{A} = \frac{24}{25} \text{ e } \cos\,\hat{A} = \frac{-7}{25}$$

3) $\text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,[180° - (\hat{A} + \hat{C})] = \text{sen}\,(\hat{A} + \hat{C}) =$

$= \text{sen}\,\hat{A} \cdot \cos\hat{C} + \text{sen}\,\hat{C} \cdot \cos\hat{A} =$

$$= \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{-7}{25}\right) = \frac{44}{125}$$

Para $\cos(\hat{A} - \hat{C}) = -\frac{3}{5}$, de modo análogo, resultaria em $\text{sen}\,\hat{A} = 0$, que é impossível.

Resposta: $\frac{44}{125}$

10

Escolhem-se aleatoriamente três números distintos no conjunto $\{1, 2, 3, ..., 29, 30\}$. Determine a probabilidade da soma desses três números ser divisível por 3.

Resolução

1) **O número total de maneiras de escolher, aleatoriamente, três números distintos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 29, 30\}$ é**

$$C_{30,3} = \frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 4060$$

2) **Sejam**
$A_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$
$A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$
$A_3 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$

3) **Os elementos de A_1, são do tipo 3k, os de A_2 do tipo $3k - 1$, os de A_3 do tipo $3k + 1$**

4) **A soma de três dos 30 números será divisível por 3 se:**
a) os três forem elementos de A_1: $C_{10,3}$
b) os três forem elementos de A_2: $C_{10,3}$
c) os três forem elementos de A_3: $C_{10,3}$
d) for um de cada um dos três conjuntos: $10 \,.\, 10 \,.\, 10$

5) **O número total de casos favoráveis é, portanto:**
$3 \,.\, C_{10,3} + 10^3 = 360 + 1000 = 1360$

6) **A probabilidade pedida é** $\dfrac{1360}{4060} = \dfrac{68}{203}$